Logika pierwszego rzędu. Sposób użycia.

Tautologie, sposoby używania logiki pierwszego rzędu, związki z językiem naturalnym

Kilka ważnych tautologii

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x \varphi \to \exists x \psi)$;

Kilka ważnych tautologii

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;

Kilka ważnych tautologii

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;

Kilka ważnych tautologii

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;

Kilka ważnych tautologii

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;

Kilka ważnych tautologii

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;

Kilka ważnych tautologii

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \land \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \land \forall x\psi$;

Kilka ważnych tautologii

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;

Kilka ważnych tautologii

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \land \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \land \forall x\psi$;
7. $\exists x(\varphi \lor \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \lor \exists x\psi$;

Kilka ważnych tautologii

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;
7. $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$;
8. $\forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \varphi \vee \forall x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;

Kilka ważnych tautologii

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \land \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \land \forall x\psi$;
7. $\exists x(\varphi \lor \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \lor \exists x\psi$;
8. $\forall x(\varphi \lor \psi) \leftrightarrow \varphi \lor \forall x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
9. $\exists x(\varphi \land \psi) \leftrightarrow \varphi \land \exists x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;

Kilka ważnych tautologii

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;
7. $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$;
8. $\forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \varphi \vee \forall x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
9. $\exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \exists x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
10. $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$;

Kilka ważnych tautologii

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;
7. $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$;
8. $\forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \varphi \vee \forall x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
9. $\exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \exists x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
10. $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$;
11. $\forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$;

Kilka ważnych tautologii

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \land \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \land \forall x\psi$;
7. $\exists x(\varphi \lor \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \lor \exists x\psi$;
8. $\forall x(\varphi \lor \psi) \leftrightarrow \varphi \lor \forall x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
9. $\exists x(\varphi \land \psi) \leftrightarrow \varphi \land \exists x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
10. $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$;
11. $\forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$;
12. $\exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$;

Kilka ważnych tautologii

1. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \exists x\psi)$;
2. $\exists x\varphi \to \varphi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
3. $\varphi(s/x) \to \exists x\varphi$;
4. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$;
5. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$;
6. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;
7. $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$;
8. $\forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \varphi \vee \forall x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
9. $\exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \exists x\psi$, o ile $x \notin FV(\varphi)$;
10. $\forall x\varphi \to \exists x\varphi$;
11. $\forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$;
12. $\exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$;
13. $\exists x\forall y\varphi \to \forall y\exists x\varphi$.

Preneksowa postać normalna

Formuła φ jest w preneksowej postaci normalnej, gdy

$$\varphi = Q_1 y_1 \, Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n \, \psi$$

gdzie każde z Q_i to $\forall$ lub $\exists$, a ψ jest formułą otwartą.

Preneksowa postać normalna

Formuła φ jest w preneksowej postaci normalnej, gdy

$$\varphi = Q_1 y_1 \, Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n \, \psi$$

gdzie każde z Q_i to $\forall$ lub $\exists$, a ψ jest formułą otwartą.

Fakt Dla każdej formuły pierwszego rzędu istnieje równoważna jej formuła w preneksowej postaci normalnej.

Preneksowa postać normalna

Formuła φ jest w preneksowej postaci normalnej, gdy

$$\varphi = Q_1 y_1 \, Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n \, \psi$$

gdzie każde z Q_i to $\forall$ lub $\exists$, a ψ jest formułą otwartą.

Fakt Dla każdej formuły pierwszego rzędu istnieje równoważna jej formuła w preneksowej postaci normalnej.

Formuła $\exists y p(y) \rightarrow \forall z q(z)$ jest równoważna każdej z następujących formuł:

Preneksowa postać normalna

Formuła φ jest w <u>preneksowej postaci normalnej</u>, gdy

$$\varphi = Q_1 y_1 \, Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n \, \psi$$

gdzie każde z Q_i to $\forall$ lub $\exists$, a ψ jest formułą otwartą.

Fakt Dla każdej formuły pierwszego rzędu istnieje równoważna jej formuła w preneksowej postaci normalnej.

Formuła $\exists y p(y) \to \forall z q(z)$ jest równoważna każdej z następujących formuł:

1. $\neg \exists y \, p(y) \vee \forall z \, q(z)$;

Preneksowa postać normalna

Formuła φ jest w preneksowej postaci normalnej, gdy

$$\varphi = Q_1 y_1 \, Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n \, \psi$$

gdzie każde z Q_i to $\forall$ lub $\exists$, a ψ jest formułą otwartą.

Fakt Dla każdej formuły pierwszego rzędu istnieje równoważna jej formuła w preneksowej postaci normalnej.

Formuła $\exists y p(y) \rightarrow \forall z q(z)$ jest równoważna każdej z następujących formuł:

1. $\neg \exists y \, p(y) \vee \forall z \, q(z)$;
2. $\forall y \, \neg p(y) \vee \forall z \, q(z)$;

Preneksowa postać normalna

Formuła φ jest w preneksowej postaci normalnej, gdy

$$\varphi = Q_1 y_1 \, Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n \, \psi$$

gdzie każde z Q_i to $\forall$ lub $\exists$, a ψ jest formułą otwartą.

Fakt Dla każdej formuły pierwszego rzędu istnieje równoważna jej formuła w preneksowej postaci normalnej.

Formuła $\exists y p(y) \rightarrow \forall z q(z)$ jest równoważna każdej z następujących formuł:

1. $\neg\exists y \, p(y) \vee \forall z \, q(z)$;
2. $\forall y \, \neg p(y) \vee \forall z \, q(z)$;
3. $\forall y(\neg p(y) \vee \forall z \, q(z))$;

Preneksowa postać normalna

Formuła φ jest w preneksowej postaci normalnej, gdy

$$\varphi = Q_1 y_1 \, Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n \, \psi$$

gdzie każde z Q_i to $\forall$ lub $\exists$, a ψ jest formułą otwartą.

Fakt Dla każdej formuły pierwszego rzędu istnieje równoważna jej formuła w preneksowej postaci normalnej.

Formuła $\exists y p(y) \to \forall z q(z)$ jest równoważna każdej z następujących formuł:

1. $\neg\exists y \, p(y) \vee \forall z \, q(z)$;
2. $\forall y \, \neg p(y) \vee \forall z \, q(z)$;
3. $\forall y(\neg p(y) \vee \forall z \, q(z))$;
4. $\forall y \forall z(\neg p(y) \vee q(z))$;

Preneksowa postać normalna

Formuła φ jest w preneksowej postaci normalnej, gdy

$$\varphi = Q_1 y_1 \, Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n \, \psi$$

gdzie każde z Q_i to $\forall$ lub $\exists$, a ψ jest formułą otwartą.

Fakt Dla każdej formuły pierwszego rzędu istnieje równoważna jej formuła w preneksowej postaci normalnej.

Formuła $\exists y p(y) \to \forall z q(z)$ jest równoważna każdej z następujących formuł:

1. $\neg\exists y\, p(y) \lor \forall z\, q(z)$;
2. $\forall y\, \neg p(y) \lor \forall z\, q(z)$;
3. $\forall y(\neg p(y) \lor \forall z\, q(z))$;
4. $\forall y \forall z(\neg p(y) \lor q(z))$;
5. $\forall y \forall z(p(y) \to q(z))$.

Logika formalna i język polski

Każdy cyrulik sewilski goli tych wszystkich mężczyzn w Sewilli, którzy się sami nie golą.
Ale nie goli żadnego z tych, którzy golą się sami.
A zatem w Sewilli nie ma ani jednego cyrulika.

Implikacja materialna i związek przyczynowo-skutkowy

Implikacja w logice klasycznej to implikacja materialna. Wartość logiczna „$\varphi \to \psi$" zależy **wyłącznie** od wartości logicznych przypisanych „φ" i „ψ".
To **nie jest** związek przyczynowo-skutkowy ani następstwo chronologiczne.

W języku polskim stwierdzenie „jeśli φ to ψ" oczywiście sugeruje związek przyczynowo-skutkowy:

Jeśli zasilanie jest włączone, to terminal działa.

Implikacja materialna nie zachodzi; materialną prawdą jest

Jeśli terminal działa to zasilanie jest włączone.

Implikacja materialna i związek przyczynowo-skutkowy

Implikacja w logice klasycznej to implikacja materialna. Wartość logiczna „$\varphi \to \psi$" zależy **wyłącznie** od wartości logicznych przypisanych „φ" i „ψ".
To **nie jest** związek przyczynowo-skutkowy ani następstwo chronologiczne.

W języku polskim stwierdzenie „jeśli φ to ψ" oczywiście sugeruje związek przyczynowo-skutkowy:

Jeśli zasilanie jest włączone, to terminal działa.

Implikacja materialna nie zachodzi; materialną prawdą jest

Jeśli terminal działa to zasilanie jest włączone.

Terminal działa, ponieważ zasilanie jest włączone,
stwierdza związek przyczynowo-skutkowy i faktyczne zajście wymienionych zdarzeń i jest niewyrażalne w logice klasycznej.

Konfuzje składniowe: kwantyfikacja

Każdy kot ma wąsy.
Pewien kot ma wąsy.

Konfuzje składniowe: kwantyfikacja

Każdy kot ma wąsy.
Pewien kot ma wąsy.

$$\forall x(Kot(x) \rightarrow MaWąsy(x));$$
$$\exists x(Kot(x) \land MaWąsy(x)).$$

Konfuzje składniowe: negacja

Liczba n jest parzysta;

Liczba n jest dwukrotnością pewnej liczby

oznaczają to samo.

Konfuzje składniowe: negacja

Liczba n jest parzysta;

Liczba n jest dwukrotnością pewnej liczby

oznaczają to samo.

Zaprzeczeniem pierwszego z nich jest zdanie

Liczba n nie jest parzysta,

ale zaprzeczeniem drugiego nie jest

Liczba n nie jest dwukrotnością pewnej liczby,

Konfuzje składniowe: koniunkcja vs. alternatywa

- Zabrania się zaśmiecania i zanieczyszczania drogi.[1]
- Zabrania się zaśmiecania lub zanieczyszczania drogi.[2]

[1] Kodeks Drogowy przed nowelizacją w roku 1997.
[2] Kodeks Drogowy po nowelizacji w roku 1997.

Konfuzje kolejności kwantyfikacji

You can fool some of the people all of the time, and all of the people some of the time, but you can not fool all of the people all of the time.
Abraham Lincoln

Opcje:

$$(\exists p \forall t \ldots) \land (\forall p \exists t \ldots) \land \neg(\forall p \forall t \ldots)$$
$$(\forall t \exists p \ldots) \land (\exists t \forall p \ldots) \land \neg(\forall p \forall t \ldots)$$

Konfuzje wynikania

jeśli A, to B
jeśli C, to B
A

B

Jeśli Marysia ma do napisania esej,
to będzie do późna pracować w bibliotece.
Jeśli biblioteka będzie otwarta późnym wieczorem,
to Marysia będzie do późna pracować w bibliotece.
Marysia ma do napisania esej.

Marysia będzie do późna pracować w bibliotece.

Konfuzje wynikania

jeśli A, to B
jeśli B, to C
A

B

Konfuzje wynikania

jeśli A, to B
jeśli B, to C
A

B

Jeśli telewizor Marii jest zepsuty,
odda go do reperacji.
Jeśli Maria odda telewizor do reperacji,
nie będzie mogła zapłacić rachunku za elektryczność.
Telewizor Marii jest zepsuty.

Maria odda telewizor do reperacji.

Konfuzje wynikania

jeśli A, to B
jeśli B, to C
A

B

Konfuzje wynikania

jeśli A, to B
jeśli B, to C
A

B

Jeśli telewizor Marii jest zepsuty,
odda go do reperacji.
Jeśli Maria odda telewizor do reperacji,
nie będzie mogła wykupić lekarstw.
Telewizor Marii jest zepsuty.

Maria odda telewizor do reperacji.

Siła wyrazu logiki pierwszego rzędu

Siła wyrazu logiki pierwszego rzędu

- Zdanie wyraża własność struktury

Siła wyrazu logiki pierwszego rzędu

- Zdanie wyraża własność struktury
  - Rozróżnianie struktur
  - Formalizowanie własności struktur
- Formuła definiuje relację w strukturze

Siła wyrazu logiki pierwszego rzędu

- Zdanie wyraża własność struktury
  - Rozróżnianie struktur
  - Formalizowanie własności struktur
- Formuła definiuje relację w strukturze
  - Rozróżnianie elementów w strukturze
  - Formalizowanie własności elementów i krotek

Rozróżnianie struktur

Sygnatura:

- Operacja dwuargumentowa $\cdot$
- Stała ε.

Rozróżnianie struktur

Sygnatura:

- Operacja dwuargumentowa $\cdot$
- Stała ε.

$$\exists x_1 \exists x_2 \forall y (\forall z_1 \forall z_2 (y = z_1 \cdot z_2 \to y = z_1 \vee y = z_2) \to y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = \varepsilon)$$

jest:

Rozróżnianie struktur

Sygnatura:

- Operacja dwuargumentowa $\cdot$
- Stała ε.

$$\exists x_1 \exists x_2 \forall y (\forall z_1 \forall z_2 (y = z_1 \cdot z_2 \rightarrow y = z_1 \vee y = z_2) \rightarrow y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = \varepsilon)$$

jest:

- prawdziwe w strukturze $\langle \{a, b\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ słów nad alfabetem $\{a, b\}^*$ z konkatenacją i słowem pustym,

Rozróżnianie struktur

Sygnatura:

- Operacja dwuargumentowa $\cdot$
- Stała ε.

$$\exists x_1 \exists x_2 \forall y (\forall z_1 \forall z_2 (y = z_1 \cdot z_2 \to y = z_1 \vee y = z_2) \to y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = \varepsilon)$$

jest:

- prawdziwe w strukturze $\langle \{a, b\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ słów nad alfabetem $\{a, b\}^*$ z konkatenacją i słowem pustym,
- fałszywe w strukturze $\langle \{a, b, c\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ słów nad alfabetem $\{a, b\}^*$ z konkatenacją i słowem pustym,

Rozróżnianie struktur

Sygnatura:

- Operacja dwuargumentowa $\cdot$
- Stała ε.

$$\exists x_1 \exists x_2 \forall y (\forall z_1 \forall z_2 (y = z_1 \cdot z_2 \to y = z_1 \vee y = z_2) \to y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = \varepsilon$$

jest:

- prawdziwe w strukturze $\langle \{a, b\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ słów nad alfabetem $\{a, b\}^*$ z konkatenacją i słowem pustym,
- fałszywe w strukturze $\langle \{a, b, c\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ słów nad alfabetem $\{a, b\}^*$ z konkatenacją i słowem pustym,

Zdanie rozróżnia te dwie struktury.

Formalizowanie własności elementów i krotek

Mamy pierścień liczb całkowitych $\mathbb{Z} = \langle Z, +, \cdot, 0, 1 \rangle$

Formalizowanie własności elementów i krotek

Mamy pierścień liczb całkowitych $\mathbb{Z} = \langle Z, +, \cdot, 0, 1\rangle$
Formuła

$$\exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \exists z_4 y = x + (z_1 \cdot z_1) + (z_2 \cdot z_2) + (z_3 \cdot z_3) + (z_4 \cdot z_4)$$

definiuje relację $x \leq y$.

Formalizowanie własności elementów i krotek

Mamy pierścień liczb całkowitych $\mathbb{Z} = \langle Z, +, \cdot, 0, 1\rangle$
Formuła

$$\exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \exists z_4 y = x + (z_1 \cdot z_1) + (z_2 \cdot z_2) + (z_3 \cdot z_3) + (z_4 \cdot z_4)$$

definiuje relację $x \leq y$.

Twierdzenie Lagrange'a

Każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów kliczb naturalnych.